

МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ
ВІЙСЬКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ ІМЕНІ ГЕРОЇВ КРУТ

**І.А. Рудоміно-Дусятська, О.О. Кільчинський, Л.М. Козубцова,
Л.Г. Огнєва, В.Є. Сновида, Л.М. Цитрицька**

ЗБІРНИК
задач і вправ з навчальної дисципліни
«Вища математика» (частина II)

Київ – 2018

УДК 51 (076.1)

З 41

І.А. Рудоміно-Дусятська, О.О. Кільчинський, Л.М. Козубцова, Л.Г. Огнєва, В.Є. Сновида, Л.М. Цитрицька.
Збірник задач і вправ з навчальної дисципліни «Вища математика» (частина II). – К.: ВІТІ, 2018. – 79 с.

Навчальне видання написане відповідно до програми навчальної дисципліни «Вища математика».

В даному збірнику стисло подається теоретичний матеріал з тем «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної» та «Інтегральне числення функцій однієї змінної», індивідуальні завдання для виконання курсантами самостійно, а також докладні роз'яснення для виконання цих завдань.

Практикум призначений для курсантів першого курсу всіх напрямків ВІТІ.

Рекомендовано до друку Вченою радою інституту, протокол № 9 від 27 березня 2018 року.

Рецензенти:

І.В. Борисов – кандидат технічних наук, доцент, начальник кафедри ВІТІ;

Г.В. Кіт – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій та програмування Івано-Франківської філії Університету «Україна».

ВСТУП

В даному збірнику викладені методичні вказівки до виконання індивідуальної розрахунково-графічної роботи № 2, наведені докладні розв'язання типових прикладів і надано достатню кількість задач, що дозволяє організувати самостійну роботу студентів.

Дана робота виконується після вивчення на лекціях та практичних заняттях розділів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної» та «Інтегральне числення функцій однієї змінної».

Мета даної роботи – допомогти курсантам повторити, закріпити та перевірити якість опанування навчального матеріалу.

Розрахунково-графічна робота містить наступні завдання:

1. Границя функцій.
2. Неперервність функцій.
3. Похідні функцій.
4. Дослідження функцій та побудова графіків.
5. Невизначений інтеграл функції однієї змінної.
6. Визначений інтеграл.
7. Застосування визначеного інтеграла.

Автори сподіваються, що даний збірник буде корисним для всіх курсантів, що вивчають курс вищої математики у ВІТІ.

Розділ 1. Вступ до математичного аналізу

§ 1. Границя функції

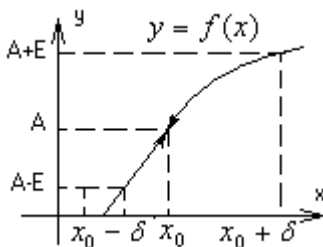
Нехай задано деяку числову множину D і кожному числу x цієї множини за певним правилом поставлено у відповідність єдине число y . Тоді кажуть, що y є функцією від x і записують $y = f(x)$, $x \in D$, а множину D називають областю визначення функції. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $(x; f(x))$ площини.

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Число A називається **границею функції в точці x_0** , якщо для довільного числа $\epsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ таке, що для всіх x з δ -околу точки x_0 , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$. Скорочено:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon):$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Геометричний зміст означення границі функції в точці:



Число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільного ϵ -околу точки A знайдеться δ -окол точки

X_0 такий, що коли значення аргументу X взяті з δ -околу точки x_0 з виколотою точкою X_0 (тобто з множини $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$), то відповідні значення функції $f(x)$ належатимуть ϵ -околу точки A .

Односторонні границі функції. В означенні границі функції в точці X_0 вважали, що змінна x прямує до X_0 довільним способом: залишаючись меншою від X_0 (тобто зліва від X_0), більшою від X_0 (тобто справа від X_0). Проте є випадки, коли спосіб наближення аргументу x до X_0 суттєво впливає на значення границі функції. У таких випадках доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Означення 2. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки X_0 . Число A називається **границею** функції $f(x)$ **зліва** (або лівою границею) в точці X_0 , якщо для довільного числа $\epsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$. Скорочено:

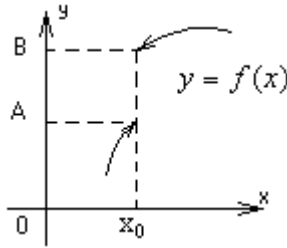
$$\lim_{\substack{x \rightarrow X_0 \\ x < X_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow X_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0:$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Число B називається **границею** функції $f(x)$ **справа** (або правою границею) в точці X_0 , якщо для довільного числа $\epsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \epsilon$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow X_0 \\ x > X_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow X_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0:$$

$$\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - B| < \epsilon.$$



Зауваження. Ліву і праву границю називають **односторонніми**. Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = B; \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = A.$$

Теорема (необхідна і достатня умова існування границі функції в точці). Для того щоб існувала границя функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували і дорівнювали одна одній односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A).$$

Для обчислення границь функцій використовують наступні формули (за умови, що означені в них границі існують):

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad C = const,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0,$$

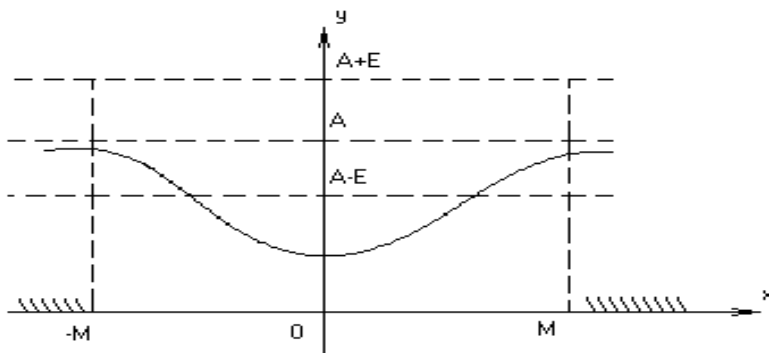
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{r(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} r(x)}, \quad f(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$$

Означення 3. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Число A називається **границею** функції $f(x)$ **при** $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа

$\epsilon > 0$ існує таке число $M = M(\epsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$. Скорочено:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Геометричний зміст означення границі функції при $x \rightarrow \infty$:



Для довільного $\epsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що при $x \in (-\infty; -M)$ або при $x \in (M; +\infty)$ відповідні значення функції $f(x)$ попадають в ϵ -окіл точки A .

Зауваження. Аналогічно формулюються означення границі функції для випадків, коли $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$.

Означення 4. Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Скорочено:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$$

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Означення 5. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою величиною** при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N = N(M) > 0 \forall x: |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Геометричний зміст означення: яким би великим не було задане число $M > 0$, графік функції $y = f(x)$ розташований зовні смуги, обмеженої прямими $y = M$, $y = -M$, якщо значення x взяті з D -околу точки x_0 .

Зауваження. Аналогічно визначається нескінченно велика функції при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

Властивості нескінченно великих величин (НВВ).

1. Сума двох НВВ одного знаку є НВВ: $\infty + \infty = \infty$.

2. Різниця двох НВВ різних знаків є невизначеністю виду $\infty - \infty$.

3. Добуток двох НВВ є НВВ: $\infty \cdot \infty = \infty$.

4. Частка двох НВВ є невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Зауваження. Вирази ∞ ; $-\infty$; $+\infty$ не є числами, це символи, які характеризують певну змінну величину.

Означення 6. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою величиною** (НМВ) при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для

всіх x , що задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)| < \epsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

Означення 7. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою величиною (НМВ) при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного числа $\epsilon > 0$ існує число $M > 0$ таке, що для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x)| < \epsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M > 0 \forall x: |x| > M \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

Зауваження. Аналогічно визначається НМВ при $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$ і при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

Властивості НМВ:

1. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була НМВ, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

2. Якщо функція $f(x)$ є НМВ при $x \rightarrow x_0$ і $f(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є НВВ при $x \rightarrow x_0$.

Справедливе і обернене твердження: якщо функція $f(x)$ є НВВ при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ є НМВ при $x \rightarrow x_0$.

3. Сума скінченної кількості НМВ є НМВ.

4. Добуток обмеженої функції на НМВ є НМВ.

5. Частка від ділення НМВ на функцію, яка має відмінну від 0 границю, є НМВ.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

де e – це стала Єйлера. Число e – ірраціональне число. Більш того, це трансцендентне число, тобто не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення дорівнює 2,71828.

Порівняння нескінченно малих функцій:

Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ називаються НМ одного порядку при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A \neq 0, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Функція $f_1(x)$ називається НМ вищого порядку, ніж $f_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Функція $f_1(x)$ називається НМ нижчого порядку, ніж $f_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty.$$

Нескінченно малі функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ називаються непорівнянними при $x \rightarrow x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Нескінченно малі функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, називаються еквівалентними НМ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність НМ функцій позначається так:
 $f_1(x) \sim f_2(x)$.

Властивості еквівалентних НМ функцій:

1. Сума скінченної кількості НМ функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

2. Нехай $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, то існує і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ і ці границі рівні

між собою.

Зауваження. Остання теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих НМ функцій одну чи обидві функції замінити еквівалентними НМВ. У цьому допоможе таблиця еквівалентних НМВ при $x \rightarrow 0$:

$\sin x \sim x$,	$e^x - 1 \sim x$,
$\operatorname{tg} x \sim x$,	$a^x - 1 \sim x \ln a$,
$\arcsin x \sim x$,	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e$,
$\arctg x \sim x$,	$\ln(1+x) \sim x$,
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,	$(1+x)^k \sim kx, \quad k > 0$.

§ 2. Неперервність функції

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 , якщо виконуються наступні умови:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існують скінченні односторонні границі функції $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$;

3) односторонні границі рівні між собою і дорівнюють значенню функції в точці x_0 , тобто

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається **розривною** в точці x_0 , а сама точка x_0 називається **точкою розриву** функції.

Функція називається неперервною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Функція називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b .

Властивості неперервних функцій:

1. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервні функції

$$f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x)f_2(x), \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ (за умови } f_2(x) \neq 0 \text{)}.$$

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

З властивостей 1 і 2 випливає:

3. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

Існує три види розривів:

1. Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив називається **усувним**. В цьому випадку до визначивши функцію в точці x_0 рівністю $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$ дістанемо неперервну в точці x_0 функцію.

2. Якщо односторонні границі існують, але $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називається **розривом 1-го роду**, а точка x_0 – точкою розриву 1-го роду.

Величина $|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називається **стрибком** функції.

3. Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює ∞ , то розрив називається **розривом 2-го роду**, а точка x_0 — точкою розриву 2-го роду.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

§ 1. Похідна

Похідною (або похідною першого порядку) функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці Δy до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна позначається символами $f'(x), y', y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Функція називається **диференційовною** в точці, якщо її приріст в цій точці можна зобразити як

$$\Delta y(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

де A – деяке дійсне число, $o(\Delta x)$ – НМВ вищого порядку, ніж Δx , коли $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема. Функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує похідна в цій точці. Більш того, $A = f'(x_0)$.

Похідна $f''(x) = (f'(x))'$ називається похідною другого порядку, похідною n -го порядку називається похідна $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, позначається через $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$.

Фізичний зміст похідної: якщо деякий процес описується функцією $f(x)$, то похідна $f'(x)$ є миттєвою швидкістю зміни цього процесу. Геометричний зміст похідної: похідна функції $f(x)$ в точці x_0 – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$.

Правила диференціювання:

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці X , то сума, різниця, добуток і частка цих функцій також диференційовні в цій же точці, причому

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2. (uv)' = u'v + uv';$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\text{за умови } v \neq 0).$$

Теорема (про похідну складеної функції). Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x , причому

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Таблиця похідних:

$$1. c' = 0.$$

$$2. (x^6)' = 6 \cdot x^{6-1}.$$

$$3. (\sin x)' = \cos x.$$

$$4. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$5. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$6. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$10. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$11. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$12. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

§ 2. Правило Лопіталя

Теорема Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$

визначені і диференційовні в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , і при $x \rightarrow x_0$ водночас прямують або до 0 або до ∞ , причому у вказаному околі $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує скінченна границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тоді існує і границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження 1. Якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ знову є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і функції $f'(x)$, $g'(x)$ задовольняють умови теореми, то правило Лопітала можна застосувати вдруге. Взагалі, теорему можна застосовувати доти, поки не отримаємо відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, яке має скінченну границю при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Зауваження 2. Правило Лопітала може бути застосовано тільки для невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називаються основними. Всі інші невизначеності можна звести до основних так:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right); \\ 2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right); \end{aligned}$$

- $$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right);$$
- $$4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = (0^0) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \ln f(x))} = e^{(0 \cdot \infty)} \text{ (невизначеність)}$$
- зводиться до пункту 1 або 2).

§ 3. Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків

Функція $f(x)$ називається **зростаючою** на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з цього інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо при $x_1 < x_2$ виконується умова $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається **спадною**. Зростаючі та спадні функції називаються **монотонними**.

Достатня умова монотонності функції. Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то функція на цьому інтервалі зростає, якщо $f'(x) < 0$ – спадає. Інтервали монотонності функції можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають **стаціонарними точками**), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними**.

Функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має **екстремум (максимум або мінімум)**, якщо $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим значенням функції в деякому околі цієї точки. Значення функції в цій точці називають **локальним максимумом** або **локальним мінімумом** (або локальним екстремумом).

Необхідна умова локального екстремуму: якщо функція має в точці локальний екстремум, то в цій точці похідна функції дорівнює нулю або не існує, тобто точка є критичною точкою першого роду.

Перша достатня умова локального екстремуму (за допомогою похідної першого порядку): якщо функція $f(x)$ неперервна в околі критичної точки x_0 , має похідну в усіх точках цього околу, крім, можливо, самої точки x_0 , і при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 – точка локального максимуму ($f_{\max} = f(x_0)$); якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 – точка локального мінімуму ($f_{\min} = f(x_0)$); якщо похідна не змінює знаку, то в точці x_0 екстремум відсутній.

Друга достатня умова локального екстремуму (за допомогою похідної другого порядку): якщо в околі стаціонарної точки x_0 функції $f(x)$ існує неперервна похідна другого порядку і якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Схема знаходження інтервалів монотонності функції та точок локального екстремуму:

1. Знаходимо область визначення функції D_f .
2. Знаходимо похідну функції $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки першого роду з рівняння $f'(x) = 0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує.
4. Розбиваємо область визначення функції критичними точками на інтервали і до кожного застосовуємо достатні умови монотонності. До критичних точок першого роду застосовуємо достатні умови існування точки екстремуму.

Теорема Вейєрштраса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень.

Для знаходження цих значень треба знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$, обчислити

значення функції $f(x)$ в знайдених точках та в точках $x=a$, $x=b$, серед цих значень вибрати найбільше і найменше.

Крива називається **опуклою вгору (вниз)** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче (вище) довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Достатня умова опуклості вгору (вниз) функції. Якщо функція $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ має похідну другого порядку і $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла вгору на $(a; b)$; якщо $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла вниз на $(a; b)$.

Точки кривої, які відділяють частину кривої опуклу вгору від опуклої вниз, називаються точками перегину кривої.

В точці перегину похідна другого порядку дорівнює нулю $f''(x_0) = 0$ (x_0 – абсциса точки перегину) або не існує; якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$ (достатня умова існування точки перегину).

Схема знаходження інтервалів опуклості та точок перегину графіка функції.

1. Знаходимо область визначення D_f .
2. Знаходимо першу $f'(x)$ і другу $f''(x)$ похідні.
3. Знаходимо критичні точки другого роду з рівняння $f''(x) = 0$ і з умови, що $f''(x)$ не існує.
4. Розбиваємо критичними точками другого роду область визначення D_f на інтервали і до кожного застосовуємо достатні умови опуклості. До критичних точок другого роду застосовуємо достатні умови існування точки перегину.

Асимптотою кривої називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої, якщо вона, рухаючись по кривій, віддаляється в нескінченність.

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$.

Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, та $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ (при $k = 0$ – горизонтальною асимптотою).

Для повного дослідження функції та побудови її графіка необхідно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
- 3) дослідити функцію на періодичність, парність та непарність;
- 4) знайти точки розриву та вертикальні асимптоти;
- 5) знайти похилі асимптоти;
- 6) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
- 7) знайти інтервали опуклості та точки перегину;
- 8) побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

§ 1. Первісна функція та невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$, заданої на проміжку $[a; b]$, якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то і кожна функція вигляду $F(x) + C$ також буде первісною для $f(x)$.

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таблиця основних інтегралів:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1).$ | 2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$ |
| 3. $\int e^u du = e^u + C.$ | 4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$ |
| 5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ | 6. $\int \cos u du = \sin u + C.$ |
| 7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C.$ | 8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C.$ |
| 9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$ | |
| 10. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C.$ | |
| 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$ | |
| 12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C.$ | |

Властивості невизначеного інтеграла:

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Якщо $\int f(x) = F(x) + C$, тоді

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

§ 2. Основні методи інтегрування

1. Метод заміни змінної (підстановки). Цей метод ґрунтується на теоремі:

Теорема (про заміну змінної у невизначеному інтегралі). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $[\alpha; \beta]$, причому множиною значень цієї функції є відрізок $[a; b]$, то справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Існують два способи заміни змінної: введення під знак диференціала і підстановка.

Метод введення під знак диференціала виражається формулою

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(\psi(x))d(\psi(x)) = F(\psi(x)) + C,$$

де $F(\psi(x))$ – первісна для $f(\psi(x))$, $F(\psi(x))$ – неперервна диференційовна функція.

Метод підстановки полягає в тому, що, якщо функція $f(x)$ неперервна, то, поклавши $x = \varphi(t)$, де функції $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – неперервні, одержуємо $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

2. Інтегрування частинами. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

§ 3. Інтегрування раціональних дробів

Раціональним дробом називається відношення двох многочленів $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Раціональний дріб називається

правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника: $m < n$, і **неправильним**, якщо $m \geq n$.

Кожний неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_k(x) + \frac{T_r(x)}{Q_n(x)}, \quad r < n.$$

Кожний правильний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів виду

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k=1, 2, 3, \dots$; $A, B, a, p, q - \text{const}$; $p^2 - 4q < 0$.

§ 4. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ раціоналізуються універсальною підстановкою $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тоді

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Ця підстановка доцільна в будь-якому випадку. Проте, в деяких випадках зручніше скористатись іншими підстановками.

1. Інтеграл $\int R(\sin x) \cos x dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x = t$.

2. Інтеграл $\int R(\cos x) \sin x dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$.

3. Інтеграл $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

4. Інтеграл $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{ctg} x = t$.

5. Інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$

- раціоналізується підстановкою $\cos x = t$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
- раціоналізується підстановкою $\sin x = t$, якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
- раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

6. Інтеграли $\int \sin bx \cos vx dx$, $\int \sin bx \sin vx dx$, $\int \cos bx \cos vx dx$ обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin \bar{b} \cos b = \frac{1}{2} (\sin(\bar{b} - b) + \sin(\bar{b} + b));$$

$$\sin \bar{b} \sin b = \frac{1}{2} (\cos(\bar{b} - b) - \cos(\bar{b} + b));$$

$$\cos \bar{b} \cos b = \frac{1}{2} (\cos(\bar{b} - b) + \cos(\bar{b} + b)).$$

7. Інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ обчислюється:

- підстановкою $\sin x = t$, якщо n – ціле додатне непарне число;
- підстановкою $\cos x = t$, якщо m – ціле додатне непарне число ;
- підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, або $\operatorname{ctg} x = t$, якщо m, n – цілі парні і хоча б одне з них від'ємне;
- підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, якщо m, n – цілі, непарні, від'ємні.
- за допомогою формул зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

якщо m, n – цілі додатні парні.

§ 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. Інтеграли типу $\int R \left(x, \sqrt[s_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_1}}, \dots, \sqrt[s_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{p_n}} \right) dx$

$\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ раціоналізуються підстановкою $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = u$, де

S – найменше спільне кратне $(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Окремі випадки:

а) $a=1, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=1.$ Інтеграл $\int R \left(x, \sqrt[s_1]{x^{p_1}}, \sqrt[s_2]{x^{p_2}}, \dots, \sqrt[s_n]{x^{p_n}} \right) dx$ раціоналізується

підстановкою $\sqrt[s]{x} = u$, де $S = \text{НСК}(s_1, s_2, \dots, s_n)$;

б) $c=0, \quad d=1.$ Інтеграл

$\int R\left(x, \sqrt[p_1]{(ax+b)^{p_1}}, \sqrt[p_2]{(ax+b)^{p_2}}, \dots, \sqrt[p_n]{(ax+b)^{p_n}}\right)dx$ раціоналізується підстановкою $\sqrt[p]{ax+b} = u$, де $S = \text{НСК}(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

2. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ за допомогою підстановки $x = t - \frac{b}{2a}$ зводяться до одного з інтегралів:

а) $\int R(t; \sqrt{m^2t^2+n^2})dt$;

б) $\int R(t; \sqrt{m^2t^2-n^2})dt$;

в) $\int R(t; \sqrt{n^2-m^2t^2})dt$.

Інтеграл а) зводиться до інтегралу виду $\int R(\sin z, \cos z)dz$ підстановкою $t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$ або $t = \frac{n}{m} \operatorname{ctg} z$; інтеграл б) зводиться до інтегралу виду $\int R(\sin z, \cos z)dz$ підстановкою $t = \frac{n}{m \sin z}$ або $t = \frac{n}{m \cos z}$; інтеграл в) зводиться до інтегралу виду $\int R(\sin z, \cos z)dz$ підстановкою $t = \frac{n}{m} \sin z$ або $t = \frac{n}{m} \cos z$.

Інтеграли цього типу раціоналізуються також за допомогою так званих підстановок Ейлера:

1) якщо $a > 0$, тоді $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$;

2) якщо $c > 0$, тоді $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3) якщо $b^2 - 4ac > 0$, тоді $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, де α – корінь квадратного тричлена ax^2+bx+c .

3. Інтеграли вигляду $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, де $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R}$ називаються інтегралами від диференціальних біномів. Вони раціоналізуються у таких випадках:

а) якщо $p \in Z$ – підстановкою $x = t^S$, де S – найменший спільний знаменник дробів m і n ;

б) якщо $\frac{m+1}{n} \in Z$ – підстановкою $a + bx^n = t^r$, де r – знаменник дробу p ;

в) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ – підстановкою $ax^{-n} + b = t^r$ ($a + bx^n = t^r x^n$), де r – знаменник дробу p .

Зауваження. Якщо інтеграл цього типу не підходить ні під один з трьох випадків, то його не можна виразити через інтеграл від раціональної функції. Першим це встановив П.Л. Чебишов (1821–1894 рр.)

§ 6. Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$. На кожному з них виберемо довільну точку σ_i і складемо суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\sigma_i) \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Число I_n називається **інтегральною** сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a; b]$ і вибору точок σ_i . Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \rightarrow 0$, що не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$, ні від вибору точок σ_i , то ця границя називається **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\sigma_i) \Delta x_i.$$

Число a називають **нижньою межею**, число b – **верхньою межею** визначеного інтеграла.

Властивості визначеного інтеграла:

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. При переставленні меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. При будь-якому розташуванні точок a, b, c на числовій осі справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ця рівність виражає властивість адитивності визначеного інтеграла відносно відрізка інтегрування: визначений інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів по всіх його частинах.

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx.$$

6. Визначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Рівності 5 і 6 виражають властивість лінійності визначеного інтегралу.

7. Визначений інтеграл від непарної функції в симетричних межах $[-a; a]$ дорівнює нулю:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ якщо } f(-x) = -f(x).$$

8. Визначений інтеграл від парної функції в симетричних межах $[-a; a]$ дорівнює подвоєному інтегралу в межах від 0 до a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ якщо } f(-x) = f(x).$$

9. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

10. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

11. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то виконується нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

12. Якщо функція $f(x)$ набуває на відрізку $[a; b]$ найбільшого M і найменшого m значень, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

13. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то існує така точка $c \in [a; b]$, що

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$, тоді має місце **формула Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Різницю $F(b) - F(a)$ записують також у вигляді $F(x) \Big|_a^b$.

Основні методи обчислення визначеного інтегралу – це інтегрування частинами і заміна змінної.

1. Заміна змінної (підстановка) у визначеному інтегралі.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1. Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;
2. Функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$;
3. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і всі значення функції $\varphi(t)$ належать відрізку $[a; b]$.

Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Важливо те, що замінюючи змінну у визначеному інтегралі знаходять також нові межі інтегрування і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

2. Інтегрування частинами визначеного інтеграла.

Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають на відрізьку $[a, b]$ неперервні похідні, тоді справедлива формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

§ 7. Застосування визначеного інтеграла

1. Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) та прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

2. Нехай задана криволінійна трапеція, яка обмежена двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, віссю Ox і графіком кривої, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta],$$

де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції, які мають на відрізьку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$. Тоді, якщо $x(t)$ на відрізьку $[\alpha; \beta]$ є монотонною, то для обчислення площі криволінійної трапеції S достатньо зробити заміну змінної $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$. Тоді

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

3. Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою $c=c(\varphi)$ та полярними радіусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, виражається інтегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} c^2(\varphi) d\varphi.$$

4. Довжину дуги L гладкої кривої $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обчислюють за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

5. Нехай крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$. Тоді її довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

6. Нехай крива в полярній системі координат задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$ функція. Довжина дуги кривої в полярних координатах

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

7. Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, навколо осі Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

8. Нехай маємо поверхню, утворену обертанням кривої, заданої неперервною на відрізку $[a; b]$ функцією $y = f(x)$, навколо осі Ox . Площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$S_{\text{нов.}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Якщо крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} \quad t \in [\mathfrak{t}; \mathbf{B}],$$

TO

$$S_{_{nog.}} = 2\mathfrak{p} \int\limits_a^b y(t) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \, dt \, .$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайдіть границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x + 1}.$$

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник дробу необмежено збільшуються (отримали невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). Щоб знайти границю, перетворимо даний дріб, поділивши чисельник та знаменник на x^2 , тобто на найвищий степінь x . Потім, використовуючи властивості границь, отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Не використовуючи диференціальне числення, знайдіть границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

Розв'язання. При $x \rightarrow 1$ чисельник та знаменник прямують до нуля (отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$).

Позбавимось від ірраціональності в знаменнику, помноживши чисельник та знаменник на $\sqrt{2-x} + 1$.
Отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2-x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{2-x} + 1)}{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{2-x} + 1)}{2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)(\sqrt{2-x} + 1)}{1 - x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(\sqrt{2-x} + 1) = -(1 + 2)(\sqrt{2-1} + 1) = -6. \end{aligned}$$

Приклад 3. Скориставшись першою важливою границею, знайдіть границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x - \sin 7x}.$$

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ чисельник та знаменник дробу прямують до нуля (отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$). Для

того, щоб скористатися першою важливою границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, необхідно перетворити дріб таким чином, щоб

у знаменнику отримати множник виду $\sin \varphi(x)$, де

$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. З цією метою використаємо формулу

перетворення різниці синусів в добуток

$$\sin b - \sin v = 2 \sin \frac{b-v}{2} \cos \frac{b+v}{2}. \text{ Отримаємо:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x - \sin 7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-2 \sin 2x \cdot \cos 5x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 \cos 5x} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Скориставшись другою важливою границею, знайдіть границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-3} \right)^{2x-1}.$$

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ основа показниково-степеневого виразу прямує до 1, показник степеня необмежено зростає (отримали невизначеність виду 1^∞). При розкритті невизначеності такого типу використовують другу важливу границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-3} \right)^{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5x+2}{5x-3} - 1 \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5x+2-5x+3}{5x-3} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{5x-3} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{5x-3} \right)^{\frac{5x-3}{5} \cdot \frac{5(2x-1)}{5x-3}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{5x-3} \right)^{\frac{5x-3}{5}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x-5}{5x-3}} = e^2.$$

Приклад 5. Дослідіть на неперервність та знайдіть точки розриву функції:

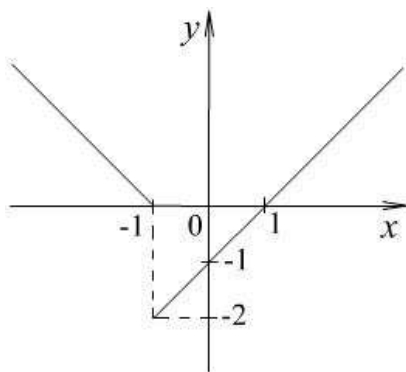
$$y = \begin{cases} -x-1, & \text{якщо } x < -1, \\ x-1, & \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція визначена при $x \in \mathbb{R}$, змінює аналітичний вираз при переході через $x = -1$. Знаходимо односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x-1) = -2.$$

Маємо скінченні різні односторонні границі, отже, $x = -1$ – точка розриву 1-го роду. В усіх інших точках функція є неперервною.



Приклад 6. Дослідіть на неперервність та знайдіть точки розриву функції:

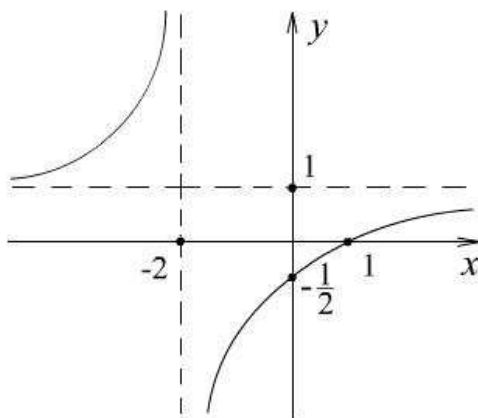
$$y = \frac{x-1}{x+2}.$$

Розв'язання. Функція $y = \frac{x-1}{x+2}$ – дробово-

раціональна, визначена при всіх значеннях x , окрім точки $x = -2$. Отже, $x = -2$ – єдина точка розриву.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x-1}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x-1}{x+2} = -\infty;$$

$x = -2$ – точка розриву 2-го роду.



Приклад 7. Дослідіть на неперервність та знайдіть точки розриву функції:

$$y = 2^{\frac{1}{x-1}}.$$

Розв'язання. Область визначення цієї функції $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція є неперервною як суперпозиція

неперервних функцій. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 1-0 (x < 1) \\ x-1 \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 1+0 (x > 1) \\ x-1 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, оскільки одна з односторонніх границь нескінченна.

Приклад 8. Знайдіть похідну функції

$$y = \arctg e^{2x} + \ln \sin \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\arctg e^{2x} + \ln \sin \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \left(\arctg e^{2x} \right)' + \left(\ln \sin \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \\ &= \frac{1}{1+(e^{2x})^2} \cdot (e^{2x})' + \frac{1}{\sin \frac{\sqrt{x}}{x+1}} \cdot \left(\sin \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{\cos \frac{\sqrt{x}}{x+1}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{x+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \\ &= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x})'(x+1) - \sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} \right)' = \\ &= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \left(\frac{\frac{(x+1)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} \right)' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайдіть похідну функції y , що задана рівнянням

$$e^{x+y} = xy.$$

Розв'язання. Функція задана неявно. Продиференціюємо по x рівняння, що задає функцію, враховуючи, що y функція від x :

$$e^{x+y}(x+y)' = y + xy'; \quad e^{x+y}(1+y') = y + xy'.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно похідної:

$$e^{x+y} + e^{x+y}y' = y + xy';$$

$$(e^{x+y} - x)y' = y - e^{x+y}; \quad y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}.$$

Враховуючи умову, отримаємо $y' = \frac{y - xy}{xy - x}.$

Приклад 10. Знайдіть похідну функції $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

Розв'язання. Похідну показниково-степеневої функції можна знайти логарифмічним диференціюванням:

якщо $y = f(x)$, то $y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$. Знаходимо похідну:

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot (\ln(x^2 + 1)^{\sin x})';$$

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot (\sin x \ln(x^2 + 1))';$$

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} \right).$$

Приклад 11. Знайдіть похідну функції

$$y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2 (x+4)^2}}.$$

Розв'язання. Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки, але такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання, а саме, спочатку логарифмуємо задану функцію, а потім знаходимо похідну як від неявної функції:

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2 (x+4)^2}};$$

$$\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{2}{5}\ln(x-3) - 2\ln(x+4);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{2}{x+4};$$

$$y' = y \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{2}{x+4} \right);$$

Враховуючи умову, отримаємо

$$y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2 (x+4)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{2}{x+4} \right).$$

Приклад 12. Знайдіть $\frac{dy}{dx}$, якщо

$$x = \operatorname{tg} t + t, \quad y = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Розв'язання. Скористаємось формулою для знаходження похідної функції, заданої параметрично:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)' = -\frac{1}{\cos^4 t} \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t};$$

$$\frac{dx}{dt} = (\operatorname{tg} t + t)' = \frac{1}{\cos^2 t} + 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\frac{1}{\cos^2 t} + 1} = \frac{2\sin t \cdot \cos^2 t}{\cos^3 t \cdot (1 + \cos^2 t)} = \frac{2\sin t}{\cos t + \cos^3 t}.$$

Приклад 13. Користуючись правилом Лопітала, знайдіть границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3 - 2x^2 + 2x} \right).$$

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ чисельник та знаменник дробу прямують до нуля (отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$).

Використаємо правило Лопіталя, тобто зробимо заміну границі відношення функцій границею відношення похідних

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3 - 2x^2 + 2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3 - 2x^2 + 2x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2 - 4x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 2)} = \frac{1 - \frac{1}{1+0}}{0 - 0 + 2} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 14. Проведіть повне дослідження функції та побудуйте її графік:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Розв'язання. Проведемо повне дослідження функції.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x , крім тих, при яких знаменник дробу дорівнює нулю

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Отже, область визначення функції $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Знаходимо точки перетину графіка функції з координатними осями. Це буде одна точка $(0; 0)$.

3. Проведемо дослідження функції на парність та непарність, періодичність. Область визначення функції симетрична відносно початку координат. Крім того,

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x).$$

Отже, функція є непарною, її графік є симетричним відносно початку координат. Функція є неперіодичною, оскільки $f(x) \neq f(x+T)$, $T \neq 0$, $T \in \mathbb{R}$.

4. Знаходимо точки розриву функції та вертикальні асимптоти. Точки розриву функції: $x = -2$, $x = 2$. На кожному з інтервалів $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$ функція неперервна як частка двох неперервних функцій.

Обчислимо односторонні границі функції в точках розриву $x = 2$ та $x = -2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2-4} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2-4} &= +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2-4} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2-4} &= +\infty.\end{aligned}$$

Отже, в точках $x = 2$ та $x = -2$ є розрив другого роду; прямі $x = 2$ та $x = -2$ є вертикальними асимптотами.

5. Знаходимо похилі асимптоти. З цією метою знайдемо

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2-4} = 0.$$

Графік функції має похилу асимптоту $y = x$.

6. Знаходимо точки екстремуму та інтервали монотонності функції заданої функції. Для цього обчислимо похідну

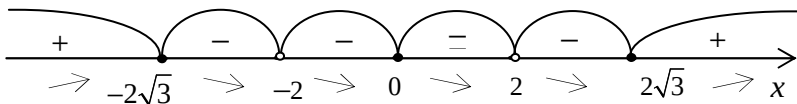
$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-4} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}.$$

Знаходимо точки, в яких похідна або дорівнює нулю, або не існує:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^4 - 12x^2 = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$$y' = \text{не існує} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm 2.$$

Наносимо ці точки на числову пряму та з'ясовуємо знак похідної в кожному з утворених інтервалів.



На інтервалах $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$ та $(2; 2\sqrt{3})$ функція монотонно спадає, на інтервалах $(-\infty; -2\sqrt{3})$ та $(2\sqrt{3}; +\infty)$ функція монотонно зростає.

Оскільки при переході через точку $x = 2\sqrt{3}$ похідна змінює знак з « $-$ » на « $+$ », то ця точка є точкою локального мінімуму $y_{\min}(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. При переході через точку $x = -2\sqrt{3}$ похідна змінює знак з « $+$ » на « $-$ », отже це точка локального максимуму $y_{\max}(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$. В точці $x = 0$ локального екстремуму немає.

7. Знаходимо інтервали опуклості графіка функції та точки перегину. З цією метою обчислимо похідну другого порядку:

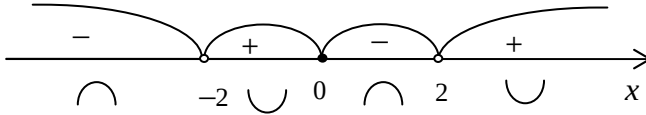
$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{4x \cdot (x^2 - 4) \cdot [(x^2 - 6) \cdot (x^2 - 4) - x^4 + 12x^2]}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{4x \cdot (x^4 - 10x^2 + 24 - x^4 + 12x^2)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3}. \end{aligned}$$

Шукаємо точки, в яких $y'' = 0$ або не існує.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (2x^2 + 24) = 0, \quad x = 0.$$

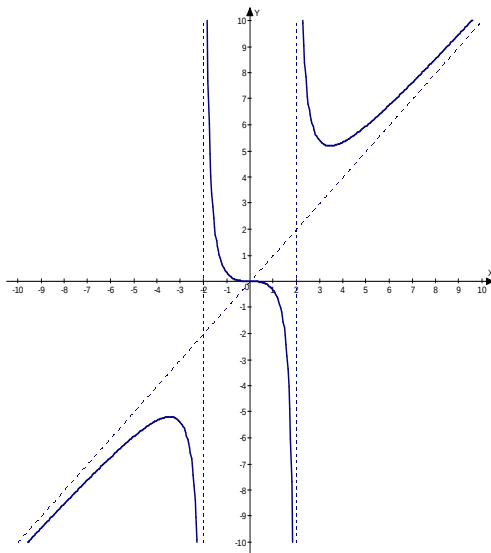
$$y' = \text{не існує} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm 2.$$

Наносимо ці точки на числову пряму та з'ясовуємо знак похідної другого порядку в кожному з утворених інтервалів.



На інтервалах $(-2; 0)$ та $(2; +\infty)$, функція опукла вниз, на інтервалах $(-\infty; -2)$ та $(0; 2)$ функція опукла вгору. Точка $(0; 0)$ є точкою перегину.

Отримані дані використаємо для побудови графіка функції.



Приклад 15. Обчисліть інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 4}}{x} dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що $d(\ln x + 4) = \frac{1}{x} dx$, маємо

$$\int (\ln x + 4)^{\frac{1}{3}} d(\ln x + 4) = \frac{3(\ln x + 4)^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$$

Приклад 16. Обчисліть інтеграл $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2 \ln x + 3 \\ du = 2 \frac{dx}{x} \\ \frac{du}{2} = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C.$$

Приклад 17. Обчисліть

$$I = \int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 9}{(x+1)^2(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний дріб, тому, розділивши чисельник на знаменник, виділимо цілу частину дробу

$$\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x - 9}{(x+1)^2(x^2 - 2x + 2)} = x - 2 + \frac{3x^3 - x^2 + 6x - 5}{(x+1)^2(x^2 - 2x + 2)}.$$

Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних дробів

$$\frac{3x^3 - x^2 + 6x - 5}{(x+1)^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2},$$

де A, B, C, D – невизначені коефіцієнти. Звідси

$$\begin{aligned} A(x+1)(x^2 - 2x + 2) + B(x^2 - 2x + 2) + (Cx + D)(x+1)^2 &= \\ &= 3x^3 - x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

Надамо x чотири різних значення (за кількістю невизначених коефіцієнтів):

$x = -1$, тоді $5B = -15$;

$x = 0$, тоді $2A + 2B + D = -5$;

$x = 1$, тоді $2A+B+4(C+D)=3$;

$x = -2$, тоді $-10A+10B+D-2C = -45$.

Розв'язуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5B = -15, \\ 2A + 2B + D = -5, \\ 2A + B + 4C + 4D = 3, \\ -10A + 10B + D - 2C = -45. \end{cases}$$

Отримаємо $A = 1$, $B = -3$, $C = 2$, $D = -1$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2x-1}{x^2-2x+2} \right) dx = \\ &= \int (x-2)dx + \int \frac{dx}{x+1} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+1| - 3 \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} dx. \end{aligned}$$

В знаменнику останнього дробу виділимо повний квадрат $(x^2 - 2x + 2) = (x-1)^2 + 1$ і введемо заміну $x-1 = t$,
 $x = t+1$, $dx = dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2} dx &= \int \frac{2(t+1)-1}{t^2+1} dt = \int \frac{2t+1}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = \ln(t^2+1) + \arctg t + C. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \ln(x^2 - 2x + 2) + \arctg(x-1) + C.$$

Приклад 18. Обчисліть $I = \int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Розв'язання. Скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Приклад 19. Обчисліть $I = \int_0^1 \frac{8x dx}{1+x^4}$.

Розв'язання.

$$I = 4 \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^4} = 4 \int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = 4 \operatorname{arctg}(x^2) \Big|_0^1 = 4(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \pi.$$

Приклад 20. Обчисліть інтеграл $\int_0^4 \frac{6x-1}{\sqrt{3x+4}+2} dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^4 \frac{6x-1}{\sqrt{3x+4}+2} dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = 3x+4, dx = \frac{2}{3} t dt \\ x = \frac{1}{3}(t^2-4), \alpha=2, \beta=4 \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{2t^3-9t}{t+2} dt =$$

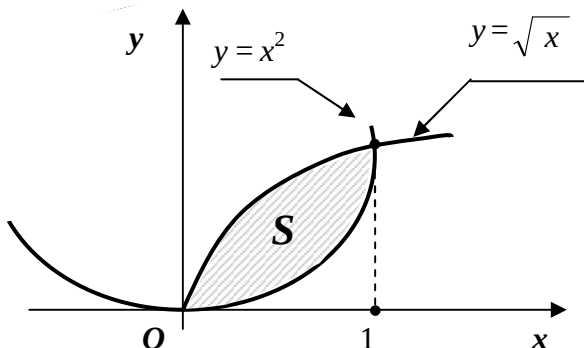
$$= \frac{2}{3} \int_2^4 \left(2t^2 - 4t - 1 + \frac{2}{t+2} \right) dt = \frac{2}{3} \left(2 \cdot \frac{t^3}{3} - 2t^2 - t + 2 \ln|t+2| \right) \Big|_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \left(2 \cdot \frac{64}{3} - 32 - 4 + 2 \ln 6 - \left(2 \cdot \frac{8}{3} - 8 - 2 + 2 \ln 4 \right) \right) = \frac{68}{9} + \frac{4}{3} \ln \frac{3}{2}.$$

Приклад 21. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Із системи рівнянь знаходимо абсциси точок перетину ліній:

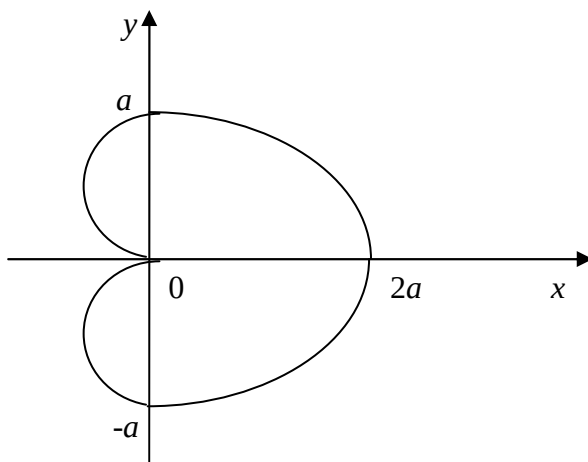
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{array} \right\}, \rightarrow x^2 = \sqrt{x}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$



Отже, шукана площа S фігури

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Приклад 22. Знайдіть довжину кардіоїди $c = a(1 + \cos \varphi)$.



Розв'язання. В силу симетрії кривої відносно полярної осі маємо

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^p \sqrt{c^2 + (c')^2} d\psi = 2 \int_0^p \sqrt{a^2((1 + \cos \psi)^2 + (-\sin \psi)^2)} d\psi = \\ &= 2a \int_0^p \sqrt{2 + 2 \cos \psi} d\psi = 4a \int_0^p \cos \frac{\psi}{2} d\psi = 8a \sin \frac{\psi}{2} \Big|_0^p = 8a. \end{aligned}$$

Приклад 23. Обчисліть площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Розв'язання. Осі координат співпадають з осями симетрії даного еліпса, і тому вони ділять його на чотири однакові частини. Четверту частину шуканої площі, розташовану в першому координатному куті, знаходимо як площу криволінійної трапеції:

$$\frac{1}{4} S = \int_0^a y dx.$$

Використовуючи параметричні рівняння еліпса, переходимо до змінної t : $y = b \sin t$, $dx = -a \sin t dt$; якщо

$x = 0$, то $t = \frac{p}{2}$; якщо $x = a$, то $t = 0$;

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a y dx = -4ab \int_{\frac{p}{2}}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = pab. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ

Завдання 1

Знайдіть границі:

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{x - 2x^3 + 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 3x}$;

2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 3x^3 - 1}{2x^2 + x^3 + 4x^5}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\sin 2x - \sin 4x}$;

3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^7 - 5x^5 + 3}{2x + 4x^6 + 2x^7}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos^4 x - \cos^2 x}$;

4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3 + x^2}{5x^4 + 7x + 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 5x$;

5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{-6x^2 + 5x - 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x}$;

6. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 8x^2 + 9}{5x + 6x^2 + x^3}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 2x}{\operatorname{tg} 2x}$

7. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 3x - 4x^3}{2x^3 + 6x - 7}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos 3x - \cos^2 3x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x+1}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-5x}}{7x + x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{3x-1}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{x^3 + 7x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{5x-2} \right)^{1-3x}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x-1) - \ln(2x+3)]$.

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{8-x}}{2x^2 + 5x - 7}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{4}{x}}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{4x+2}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) [\ln x - \ln(x+2)]$.

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{5}}{x^2 - 3x - 28}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{\frac{2}{x}}$.

8. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-5x^2}{x^2+4x-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+7x}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-3x}}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}^2 5x}{x^2 \operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{4x}{x-2}}$.
 9. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x^2-1}{2x+3x^2+4x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{2x+3}-3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{\arcsin^2 x}$; г) $\lim_{x \rightarrow -1} (3+2x)^{\frac{4}{x+1}}$.
 10. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-8x^3}{2x^3+4x+3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{4+x}}{x^2-x-2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos 3x - \cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} (4+x)^{\frac{5}{x-3}}$.
 11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8+2x^3+1}{3-2x^8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{4x-7}}{x^2-4}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{1-\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{4}{x}}$.
 12. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4+2x^3+5}{8-3x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-3x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-\cos x)}{\arcsin^3 x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$.
 13. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-6x+2}{x-7x^2+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x-3}-1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-4} \right)^{1-4x}$.
 14. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-9x^2}{18x^2+5x+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x^2+5x+6}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 3x}{\sin 3x - \sin 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{3x+1}{1-x}}$.
 15. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3-1}{x+x^2+x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}}{x^3+x}$;

- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 6x - \cos^3 6x}{\sin^2 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{2}{\sin^2 x}}$.
16. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^4}{5x^4 + 2x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{7x+1} - \sqrt{1-7x}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin 3x - \sin 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$.
17. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x^2 + x^3}{3x^3 - 2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+2}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 5x}{\cos 6x - \cos 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) \left[\ln(x-3) - \ln x \right]$.
18. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x - 1}{2x^3 + x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x+5} - \sqrt{2x+8}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos 3x - \cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{6x}{x-1}}$.
19. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x^5 + 10}{x + 5x^3 - 2x^6}$; б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{1 - \cos 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.
20. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x + 9}{-2x^3 + 4x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{x^2 - 3x - 4}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos 6x - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.
21. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x - x^2 - x^5}{3x^5 + x^4 + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{9+x} - 1}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{1 - \cos 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x-3)^{\frac{6x}{1-x}}$.
22. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^4 + x^3}{2x^4 + x + 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 6x + 20}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 4x - 1}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 5x)^{\operatorname{ctg} x}$.

23. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^7 + 3x^5 - 1}{5 + 2x^2 - 8x^7}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 6}}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{5x}{3-x}}$.
 24. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x - x^4}{2x^4 + x^3 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{3x^2 + x - 4}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\frac{5x}{x+1}}$.
 25. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^6 + x^7}{8x^7 - 10x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 3}{x^2 + 7x + 10}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{\sin x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.
 26. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 6x^4 + x - 10}{6x^6 - 2x^2 + x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{x^2 - 2x + 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}}$.
 27. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 + 1}{4x^3 - 3x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3 - x} - 1}{x^2 - 4x + 4}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{4}}{\sin^2 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x - 2}\right)^{\frac{1}{x}}$.
 28. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{2x^4 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{10 - x} - 3}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 x}{(1 - \cos x) \sin x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 2}\right)^{\frac{1}{x}}$.
 29. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 + x^6 + x^4 - 1}{x^9 + x^8 + x^5 + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x^2 - 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^4 2x}{(1 - \cos^3 x) \sin^3 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x + 4}\right)^{\frac{1}{2x}}$.
 30. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x^4 + x^3 - 8}{x^5 - x^3 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^4 + 2x^3 + x^2}$;

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 5x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Завдання 2

Дослідіть функції на неперервність. Знайдіть точки розриву та вкажіть їх характер:

$$1. \text{ а) } y = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

$$2. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{якщо } x \neq 0 \\ 2, & \text{якщо } x = 0 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$3. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 1 \\ x+1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}.$$

$$4. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{якщо } x > 1 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

$$5. \text{ а) } y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases};$$

$$б) y = e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$6. \text{ а) } y = \begin{cases} 3^x, & \text{якщо } x \geq 0 \\ 1 + x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{1 - \cos px}{4 - x^2}.$$

$$7. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, & \text{якщо } x \neq 3 \\ 9, & \text{якщо } x = 3 \end{cases};$$

$$б) y = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}.$$

$$8. \text{ а) } y = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 0 \\ 9 + x, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases};$$

$$б) y = \frac{x+3}{|x+3|}.$$

$$9. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{якщо } x > 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{3 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$10. \text{ а) } y = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{якщо } |x| > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = e^{\frac{\operatorname{arctg} 1}{x-2}}.$$

$$11. \text{ а) } y = \begin{cases} \cos \frac{p}{2} x, & \text{якщо } |x| < 1 \\ 0, & \text{якщо } |x| \geq 1 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

$$12. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 5 \\ x-1, & \text{якщо } x > 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \sin \frac{p}{2x}.$$

$$13. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } |x| > 2 \\ 1-x, & \text{якщо } |x| \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$14. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}.$$

$$15. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{x^3 - 125}{x-5}, & \text{якщо } x \neq 5 \\ 75, & \text{якщо } x = 5 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = 5^{\frac{1}{4-x}}.$$

$$16. \text{ а) } y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } |x| < 1 \\ 2, & \text{якщо } |x| \geq 1 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{2^x - 4}.$$

$$17. \text{ а) } y = \begin{cases} 0,5x^2, & \text{якщо } |x| < 2 \\ 2, & \text{якщо } |x| \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \frac{|x-1|}{x^3 - x^2}.$$

$$18. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0 \\ 5, & \text{якщо } x = 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$19. \text{ а) } y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{якщо } x \leq 0 \\ x, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = 1 - 6^{\frac{1}{x-5}}.$$

$$20. \text{ а) } y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x \leq \frac{p}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x > \frac{p}{2} \end{cases};$$

$$\text{б) } y = x + 2^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$21. \text{ а) } y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{якщо } |x| < \frac{p}{2} \\ x, & \text{якщо } |x| \geq \frac{p}{2} \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}.$$

$$22. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } |x| \leq 1 \\ 1 - x, & \text{якщо } |x| > 1 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$23. \text{ а) } y = \begin{cases} x + 7, & \text{якщо } |x| > 3 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } |x| \leq 3 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \arcsin \frac{1}{1-x}.$$

$$24. \text{ а) } y = \begin{cases} |\sin x|, & \text{якщо } |x| < \frac{p}{2} \\ 1 + x, & \text{якщо } |x| \geq \frac{p}{2} \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \frac{x-5}{|x-5|}.$$

$$25. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \lg(1+x), & \text{якщо } x > 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = \cos \frac{p}{x-1}.$$

$$26. \text{ а) } y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}; \quad \text{б) } y = \frac{\ln(1-3x)}{x}.$$

$$27. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{якщо } x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}.$$

$$28. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{3^x - 9}.$$

$$29. \text{ а) } y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x > 2 \\ 6-x, & \text{якщо } x \leq 2 \end{cases}; \quad \text{б) } y = \frac{1-e^{3x}}{x}.$$

$$30. \text{ а) } y = \begin{cases} \sin \frac{p}{x}, & \text{якщо } x \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

Завдання 3

Знайдіть похідну $\frac{dy}{dx}$ для заданих функцій

$$1. \text{ а) } y = \ln(e^x + 3 + 2x); \quad \text{б) } x + y = e^y \cdot \operatorname{arctg} x;$$

$$\text{в) } y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \quad \text{г) } \begin{cases} x = 2 + 3 \cos t; \\ y = 3 + 2 \sin t. \end{cases}$$

$$2. \text{ а) } y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \quad \text{б) } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\text{в) } y = x^{\frac{1}{x}}; \quad \text{г) } \begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

3. а) $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$; б) $x^3 + y^3 = 6xy + 1$;
 б) $y = x^5 (1 + 3x)^3 (1 - 2x)^2 \sqrt{1 + x}$; р) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = t - \cos t. \end{cases}$
4. а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$;
 б) $y^3 - 3y + 2x - x^2 y^2 = 0$;
 б) $y = x^{\arcsin x}$; р) $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t; \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$
5. а) $y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; б) $\sqrt{x + y} = x + \cos 2y$;
 б) $y = x^x$; р) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$
6. а) $y = \ln \sqrt{\operatorname{tg} \sqrt{1 - x}}$; б) $x \cdot \operatorname{tg} y = y \cdot \operatorname{tg} x$;
 б) $y = (x - x^2)^{x-1}$; р) $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \cos 3t. \end{cases}$
7. а) $y = e^{x^2 \cdot \arcsin(1 - 2x)}$; б) $xy = e^{x+y}$;
 б) $y = x^{\sqrt{x}}$; р) $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
8. а) $y = x\sqrt{1 - x^2} - \ln \cos 2x$; б) $x + y = e^{xy}$;
 б) $y = (\cos x)^{\sin x}$; р) $\begin{cases} x = 1 + t^2; \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$
9. а) $y = x \cdot \arcsin 2x + \sqrt{1 - x^2}$; б) $\sqrt{y} = x^2 + \sin xy$;

- б) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; г) $\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$
10. а) $y = \operatorname{arctg}\left(e^{2x}\right) - \frac{3}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$; б) $x \cdot \sin y - \cos y - \cos x = 0$;
- б) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$; г) $\begin{cases} x = t \cdot \cos t; \\ y = t \cdot \sin t. \end{cases}$
11. а) $y = \arcsin^4(\operatorname{tg} x)$; б) $e^{xy} = xy + 1$;
- б) $y = (\ln x)^{\sin x}$; г) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t; \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$
12. а) $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\right)$; б) $y = e^{x^2 - 2yx}$;
- б) $y = x^{1-x^2}$; г) $\begin{cases} x = 2t^3 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$
13. а) $y = e^{\cos x} \cdot \sin x^2$; б) $xy = \arcsin(x - y)$;
- б) $y = (\sin x)^{x^2}$; г) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$
14. а) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ б) $x \cdot \ln y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;
- б) $y = (\cos x)^{\ln x}$; г) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t; \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$
15. а) $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \arcsin \sqrt{1-x^2}$; б) $x^2 y^3 = e^{2y+x}$;

$$\text{в)} y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x-1}};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = t^2 - 5t; \\ y = t^3 + 3t - 1. \end{cases}$$

$$16. \text{ а)} y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \arcsin \frac{1}{x}; \quad \text{б)} e^{x+y} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$\text{в)} y = x^{e^{2x}};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t); \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

$$17. \text{ а)} y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1+x}{1-x};$$

$$\text{б)} y \sin x = xy^2 + 1;$$

$$\text{в)} y = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} 2x};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \cos^2 t + 1; \\ y = \sin^2 t - 1. \end{cases}$$

$$18. \text{ а)} y = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}; \quad \text{б)} x^y = y^x;$$

$$\text{в)} y = \sqrt{\frac{x(x-1)^3}{(x+1)^5(x-2)}};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = e^{1-\frac{1}{t}}; \\ y = e^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

$$19. \text{ а)} y = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{x}{2}};$$

$$\text{б)} \operatorname{tg}(xy) = \ln(x-y);$$

$$\text{в)} y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}; \\ y = \frac{t}{t+1}. \end{cases}$$

$$20. \text{ а)} y = \cos^2 \left(\sqrt{\ln \sin x} \right); \quad \text{б)} \arcsin(x+y) = e^{xy};$$

$$\text{в) } y = x^{\sqrt{\operatorname{ctg} x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t + \frac{1}{t}; \\ y = \frac{1}{t} - t. \end{cases}$$

$$21. \text{ а) } y = x \cdot e^{1 - \cos x};$$

$$\text{б) } y^2 - x^3 = \operatorname{tg}(y - x);$$

$$\text{в) } y = x^9 (x - 5)^8 (x + 4)^5 \sqrt{x^2 + 3}; \text{ г) } \begin{cases} x = 2t - t^3; \\ y = 2t^2 + 2. \end{cases}$$

$$22. \text{ а) } y = e^{\sin^2 3x} \cdot \cos 6x;$$

$$\text{б) } \ln(y - x) = \frac{1}{(y - x)};$$

$$\text{в) } y = x^{\arccos x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

$$23. \text{ а) } y = \operatorname{tg}(\cos^2 2x);$$

$$\text{б) } xy = e^{x+y} - \cos(xy);$$

$$\text{в) } y = \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t^5 + 2t^3; \\ y = t^3 + 3t^2 - 1. \end{cases}$$

$$24. \text{ а) } y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right);$$

$$\text{б) } \ln(y - x) = \arcsin(xy);$$

$$\text{в) } y = \left(\frac{1}{x} \right)^{x^2};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}; \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$25. \text{ а) } y = \ln\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\right]; \text{ б) } \sqrt{xy} = (x - y)^2 + 1;$$

$$\text{в) } y = \left(\frac{1}{x} \right)^x;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = e^{3t}; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

26. а) $y = \arctg \sqrt[5]{1 - \sin^3 5x}$; б) $\sqrt{x^2 y - y^2} = x^2 + 1$;
 в) $y = (\sin 4x)^{2x-3}$; г) $\begin{cases} x = 2^{5t}; \\ y = \operatorname{tg} 3t. \end{cases}$
27. а) $y = \sin^{\frac{1}{3}}(\arcsin 3x)$; б) $\cos(y + x) = 2^{x+y} - 5$;
 в) $y = (5x + 6)^{1-x}$; г) $\begin{cases} x = \arctg 6t; \\ y = e^{2t} - t^3. \end{cases}$
28. а) $y = \sqrt[7]{\log_2 \frac{1-x}{2}}$; б) $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} = x + 7$;
 в) $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{tg} x}$; г) $\begin{cases} x = \frac{1+t^2}{1-t^3}; \\ y = \cos^5 t. \end{cases}$
29. а) $y = 3^{\cos^4 5x}$; б) $3^{x+y} - y^2 = xy$;
 в) $y = \left(\operatorname{tg}^{\frac{1}{7}} 2x \right)^{\sin x}$; г) $\begin{cases} x = \ln(1 + 2t); \\ y = \arcsin^2 t. \end{cases}$
30. а) $y = 10^{1 - \operatorname{ctg}^4 x}$; б) $x^2 y + y^3 - 2x + 5 = 0$;
 в) $y = (2x)^{\sin^2 x}$; г) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \log_3 t. \end{cases}$

Завдання 4

Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки:

1. а) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$; б) $y = (2x + 3) \cdot e^{-2(x+1)}$.

$$2. \text{ a) } y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

$$3. \text{ a) } y = \frac{2}{x^2 + 2x};$$

$$\text{б) } y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1.$$

$$4. \text{ a) } y = \frac{4x^2}{x^2 + 3};$$

$$\text{б) } y = (3-x) \cdot e^{x-2}.$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{12x}{x^2 + 9};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$6. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x+2} + 1$$

$$7. \text{ a) } y = \frac{4 - x^3}{x^2};$$

$$\text{б) } y = (x-2) \cdot e^{3-x}.$$

$$8. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$9. \text{ a) } y = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$$\text{б) } y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}.$$

$$10. \text{ a) } y = \frac{(x-1)^2}{x^2};$$

$$\text{б) } y = -(2x+1) \cdot e^{2(x+1)}.$$

$$11. \text{ a) } y = \frac{x^2}{(x-1)^2};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$12. \text{ a) } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2;$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

$$13. \text{ a) } y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12};$$

$$\text{б) } y = 20(2x+5) \cdot e^{-2(x+2)}.$$

$$14. \text{ a) } y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$15. \text{ a) } y = \frac{-8x}{x^2-4};$$

$$\text{б) } y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$16. \text{ a) } y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2;$$

$$\text{б) } y = (4-x) \cdot e^{x-3}.$$

$$17. \text{ a) } y = \frac{3x^4+1}{x^3};$$

$$\text{б) } y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$18. \text{ a) } y = \frac{4x}{(x+1)^2};$$

$$\text{б) } y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$19. \text{ a) } y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2};$$

$$\text{б) } y = (2x-1) \cdot e^{2(1-x)}.$$

$$20. \text{ a) } y = \frac{1-2x^3}{x^2};$$

$$\text{б) } y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

$$21. \text{ a) } y = \frac{4}{x^2+2x-3};$$

$$\text{б) } y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3.$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{4}{3+2x-x^2};$$

$$\text{б) } y = -(x+1) \cdot e^{x+2}.$$

$$23. \text{ a) } y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3};$$

$$\text{б) } y = -\frac{e^{x+3}}{x+3}.$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{1}{x^4-1};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$\begin{array}{ll}
25. \text{ a) } y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2; & \text{б) } y = -(2x+3) \cdot e^{2(x+2)}. \\
26. \text{ a) } y = \frac{x^3 - 32}{x^2}; & \text{б) } y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}. \\
27. \text{ a) } y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}; & \text{б) } y = \ln \frac{x-5}{x} + 2. \\
28. \text{ a) } y = \frac{3x-2}{x^3}; & \text{б) } y = (x+4) \cdot e^{-(x+3)}. \\
29. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}; & \text{б) } y = \frac{e^{x-3}}{x-3}. \\
30. \text{ a) } y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}; & \text{б) } y = \ln \frac{x+6}{x} - 1. \\
31. \text{ a) } y = \frac{x^3 - 4}{x^2}; & \text{б) } y = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1.
\end{array}$$

Завдання 5

Знайдіть невизначені інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ a) } \int 4^x \sqrt{4^x - 9} dx; & \text{б) } \int x \cos 3x dx; \\
\text{в) } \int \frac{x dx}{x^2 - 5x + 6}; & \text{г) } \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{2 - \sin x}. \\
2. \text{ a) } \int \frac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; & \text{б) } \int (x+3)e^{2x} dx; \\
\text{в) } \int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 6x}; & \text{г) } \int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx; \quad \text{д) } \int \operatorname{tg}^3 x dx.
\end{array}$$

3. а) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 1}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x \ln 4x dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.
4. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx$; б) $\int \arcsin 2x dx$;
- в) $\int \frac{x dx}{x^3 - 8}$ г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x}$.
5. а) $\int x^2 \sqrt[4]{x^3 - 12} dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sin^2 4x}$;
- в) $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x - 8}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{1 + 5\cos x}$.
6. а) $\int \frac{(e^{-x} + 5)^3}{e^x} dx$; б) $\int \ln(3x + 1) dx$;
- в) $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2 - x + 2)}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x - 2\sqrt{x+1} + 2} dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx$.
7. а) $\int \frac{\arctg 2x dx}{1 + 4x^2}$; б) $\int \arctg 4x dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$;
- г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 25}}$; д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x}$.
8. а) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} x + 4}}{\sin^2 x} dx$; б) $\int x^4 \ln 3x dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + 5x - 5}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.
9. а) $\int 9^x \sqrt[3]{9^x + 8} dx$; б) $\int x \sin \frac{x}{3} dx$;
- в) $\int \frac{x dx}{x^2 + 4x - 5}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{3\cos x + 2\sin x - 1}$.

10. а) $\int \frac{(\arcsin x + 5)^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int (x-2)e^{3x} dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 + 6x^2 + 10x}$; г) $\int \frac{\sqrt{x-6}}{x} dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.
11. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - 1}}{\cos^2 2x} dx$; б) $\int x^2 \ln 6x dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 - 7x^2}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.
12. а) $\int \frac{\ln^3 x - 3 \ln x}{x} dx$; б) $\int (x+4) \cos x dx$;
- в) $\int \frac{xdx}{x^3 - 27}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+5}}$; д) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - \sin x \cos x}$.
13. а) $\int \sqrt[3]{4-x^2} x dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sin^2 5x}$;
- в) $\int \frac{xdx}{x^2 + 3x - 18}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{7-2\sin x}$.
14. а) $\int \frac{(e^{6x} - 2)dx}{e^{-x}}$; б) $\int \ln(4-5x) dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$; г) $\int \frac{\sqrt{x-5} dx}{x + \sqrt{x-5}}$; д) $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} dx$.
15. а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arccctg} 3x} dx}{1+9x^2}$; б) $\int \operatorname{arccctg} \frac{x}{5} dx$;
- в) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.
16. а) $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x - 1)^2 dx}{\sin^2 x}$; б) $\int x^7 \ln \frac{x}{2} dx$;

- в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+6}}$; д) $\int \frac{dx}{5\cos x - 2}$.
17. а) $\int (16^x - 1)^2 4^x dx$; б) $\int x \sin 7x dx$;
- в) $\int \frac{xdx}{x^2 + x - 12}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{36 - x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.
18. а) $\int \frac{\sqrt[5]{\arcsin x - 3}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; б) $\int (x + 7)e^{5x} dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x} dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$.
19. а) $\int \frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x} + 2)^2}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^9 \ln 2x dx$;
- в) $\int \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.
20. а) $\int \frac{(5 - \sqrt{\ln x})dx}{x}$; б) $\int (x - 2) \cos \frac{x}{3} dx$;
- в) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+7}}$; д) $\int \frac{dx}{3\sin x \cos x - 7\sin^2 x}$.
21. а) $\int \sqrt[3]{7 + x^2} x dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sin^2 8x}$;
- в) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{6 + 5\cos x}$.
22. а) $\int \frac{\sqrt[5]{e^{-2x} - 1}}{e^{2x}} dx$; б) $\int \ln(x^2 + 5) dx$;
- в) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{x + \sqrt{x+2}}$; д) $\int \operatorname{tg}^2 5x dx$.
23. а) $\int \frac{(\operatorname{arctg} 2x - 1)^2}{1 + 4x^2} dx$; б) $\int \operatorname{arcctg} 2x dx$;

б) $\int \frac{xdx}{(x-2)(x^2-2x+4)}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+49}}$; д) $\int \frac{dx}{\sin 2x \cos^2 2x}$.

24. а) $\int \frac{(4+2\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2}{\sin^2 x} dx$; б) $\int x^5 \ln \frac{x}{4} dx$;

б) $\int \frac{dx}{x^3-3x^2+x-3}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$; д) $\int \frac{dx}{2\sin x+1}$.

25. а) $\int \frac{\sqrt{3^x+9}}{3^{-x}} dx$; б) $\int (x-1) \sin 8x dx$;

б) $\int \frac{xdx}{x^2-4x-12}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{49-x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{5+\cos x}$.

26. а) $\int x \ln 4x dx$; б) $\int (x+3)e^{2x} dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$; г) $\int x \cos 3x dx$; д) $\int \frac{dx}{2-\sin x}$;

27. а) $\int \frac{xdx}{\sin^2 4x}$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{1+4x^2}$;

б) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; г) $\int \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x} dx$; д) $\int \arcsin 2x dx$.

28. а) $\int x^2 \ln 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$;

б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$; г) $\int \frac{dx}{x^3+6x^2+10x}$; д) $\int x \sin \frac{x}{3} dx$.

29. а) $\int \frac{xdx}{x^2+x-12}$; б) $\int \sqrt[3]{4-x^2} x dx$; в) $\int \frac{(e^{6x}-2)dx}{e^{-x}}$;

г) $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x-1)^2 dx}{\sin^2 x}$; д) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

30. а) $\int \ln(x^2+5) dx$; б) $\int \sqrt[3]{7+x^2} x dx$;

$$\text{в) } \int \frac{x dx}{x^3 - 1}; \quad \text{г) } \int \frac{\sqrt[5]{\arcsin x - 3}}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \quad \text{д) } \int (x - 2) \cos \frac{x}{3} dx.$$

Завдання 6

Обчисліть визначені інтеграли:

$$1. \text{ а) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} + 1};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx.$$

$$2. \text{ а) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{2-x}};$$

$$\text{б) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2} dx.$$

$$3. \text{ а) } \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$4. \text{ а) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx.$$

$$5. \text{ а) } \int_2^6 \frac{4x+1}{\sqrt{2x-3}+7} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cos x dx.$$

$$6. \text{ а) } \int_0^4 \frac{6x+1}{\sqrt{3x+4}+3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^4 2x dx.$$

$$7. \text{ а) } \int_0^2 \frac{8x+1}{\sqrt{4x+1}+3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \cos^4 x dx.$$

$$8. \text{ а) } \int_3^7 \frac{8x+5}{\sqrt{4x-3}+2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 2x dx.$$

$$9. a) \int_0^2 \frac{10x-7}{\sqrt{5x-1}+1} dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$10. a) \int_0^5 \frac{14x-5}{\sqrt{7x+1}+2} dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x \cos x}.$$

$$11. a) \int_1^2 \frac{dx}{x(3 \ln x + 2)};$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg}^3 4x dx.$$

$$12. a) \int_3^1 \frac{10x-3}{\sqrt{5x+1}+3} dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

$$13. a) \int_0^5 \frac{7x-2}{\sqrt{x+4}+5} dx;$$

$$б) \int_0^{\pi} \sin^3 2x dx.$$

$$14. a) \int_1^6 \frac{6x+7}{\sqrt{3x-2}+1} dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$15. a) \int_0^4 \frac{4x+3}{\sqrt{2x+1}+5} dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

$$16. a) \int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + \sin^3 \frac{x}{2}\right) \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$17. a) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$б) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$18. \text{ a) } \int_e^{e^2} x^2 \ln x dx;$$

$$19. \text{ a) } \int_0^1 x \cdot \arcsin x dx;$$

$$20. \text{ a) } \int_1^e \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$21. \text{ a) } \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx;$$

$$22. \text{ a) } \int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$23. \text{ a) } \int_{-1}^1 \arccos x dx;$$

$$24. \text{ a) } \int_0^1 (2x+1)e^{3x} dx;$$

$$25. \text{ a) } \int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+2};$$

$$26. \text{ a) } \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{2-x}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4 \cos x}.$$

$$\text{б) } \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x - \cos x}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\sin x + \cos x}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2+\cos x}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5+3 \sin x}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin x + 2}.$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x + 1}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx.$$

$$27. \text{ a) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$28. \text{ a) } \int_1^6 \frac{6x+7}{\sqrt{3x-2}+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

$$29. \text{ a) } \int_3^7 \frac{8x+5}{\sqrt{4x-3}+2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$30. \text{ a) } \int_2^6 \frac{4x+1}{\sqrt{2x-3}+7} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \sin^4 2x dx.$$

Завдання 7

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y = x^2 - 4x - 1$ і $y = -x - 1$.
2. $y = x^2 - 6x + 7$ і $y = -x - 1$.
3. $y = x^2 + 6x - 5$ і $y = x - 5$.
4. $x^2 - 4x + y - 5 = 0$ і $x + y - 5 = 0$.
5. $x^2 - 12x - 3y + 36 = 0$ і $2x - y - 12 = 0$.
6. $x^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ і $x - 2y + 8 = 0$.
7. $x^2 - 6x - y - 2 = 0$ і $x + y + 2 = 0$.
8. $x^2 - 8x - 3y + 16 = 0$ і $2x - y - 8 = 0$.
9. $x^2 - 6x + y - 1 = 0$ і $x + y - 7 = 0$.
10. $x^2 - 3x - y + 3 = 0$ і $5x + y - 6 = 0$.

11. $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ і $x - 2y + 10 = 0$.
12. $x^2 - 2x + y + 2 = 0$ і $x - y - 4 = 0$.
13. $x^2 + 6x + y - 3 = 0$ і $x - y + 9 = 0$
14. $x^2 - 8x - y + 16 = 0$ і $2x - y + 16 = 0$.
15. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ і $x - 2y + 11 = 0$.
16. $x^2 - 4x + y - 5 = 0$ і $x + y - 5 = 0$.
17. $x^2 - 6x - 3y + 9 = 0$ і $2x - y - 6 = 0$.
18. $x^2 - 6x + y - 1 = 0$ і $x - y + 1 = 0$.
19. $x^2 - 2x + y - 8 = 0$ і $x + y - 4 = 0$.
20. $x^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ і $x - 2y + 8 = 0$.
21. $x^2 - 12x - 3y + 36 = 0$ і $2x - y - 12 = 0$.
22. $x^2 - 6x - y - 2 = 0$ і $x + y + 2 = 0$.
23. $x^2 - 8x - 3y + 16 = 0$ і $2x - y - 8 = 0$.
24. $x^2 - 6x + y - 1 = 0$ і $x + y - 7 = 0$.
25. $x^2 - 3x - y + 3 = 0$ і $5x + y - 6 = 0$.
26. $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ і $2x - 4y + 20 = 0$.
27. $x^2 - 2x + y + 2 = 0$ і $x - y - 4 = 0$.
28. $x^2 + 6x + y - 3 = 0$ і $x - y + 9 = 0$.
29. $x^2 - 8x - y + 16 = 0$ і $2x - y + 16 = 0$.
30. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ і $x - 2y + 11 = 0$.

Завдання 8

1. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $x = e$ та віссю абсцис.

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лінією $c = 2\sin 3\varphi$.
3. Обчисліть довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$.
4. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена гіперболою $xy = 4$, прямими $x = 3$, $x = 12$ та віссю абсцис.
5. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, яка обмежена гіперболою $y = \frac{6}{x}$, прямими $y = 1$, $y = 6$ та віссю ординат.
6. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена параболою $y = 2x - x^2$ та віссю абсцис.
7. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена параболою $y = \frac{1}{4}x^2$, прямою $x = 4$ та віссю абсцис.
8. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.
9. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$.
10. Обчисліть площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $y = 0$.
11. Обчисліть площу фігури, обмеженої лінією $c = 4\sin^2 \varphi$.
12. Обчисліть площу фігури, обмеженої лінією $c = 2(1 + \cos \varphi)$.
13. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{6}{x^2}$, $y = 7 - x^2$, (I чверть).
14. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $c = 2 \cos \varphi$, $c = 1$ (зовні круга $c = 1$).

15. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I чверть).
16. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$.
17. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$.
18. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $x^2 - 6y + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$.
19. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$.
20. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = 6x$, $2x = 3y$, $x = 1$, $x = 3$.
21. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$, $x = 0$.
22. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
23. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.
24. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$.
25. Обчисліть площу фігури, обмеженої лінією $c = 2 \cos 3z$.
26. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.
27. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена лініями $y = -x + 3$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

28. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 - 4$ та віссю абсцис.
29. Обчисліть довжину дуги кривої $c = 2 \cos^3 \frac{\pi}{3}$.
30. Обчисліть довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2005.– 648 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Збірник задач з вищої математики. – К.: А.С.К., 2005.– 530 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Для втузов, т. 2. – М.: Наука, 1985.– 576 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.,1972.– 416с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1989.– 583 с.
6. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991.– 448 с.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.: Вища шк., Головне вид-во, 1986.– 512 с.
8. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1991.– 320 с.
9. Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1987.– 320 с.

Зміст

Вступ.....	3
Розділ 1. Вступ до математичного аналізу.....	4
§ 1. Границя функції.....	4
§ 2. Неперервність функції.....	11
Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	14
§ 1. Похідна.....	14
§ 2. Правило Лопіталю.....	15
§ 3. Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків.....	17
Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	21
§ 1. Первісна функція та невизначений інтеграл.....	21
§ 2. Основні методи інтегрування.....	22
§ 3. Інтегрування раціональних дробів.....	23
§ 4. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.....	24
§ 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	25
§ 6. Визначений інтеграл.....	27
§ 7. Застосування визначеного інтеграла.....	31
Розв'язання типових задач.....	34
Завдання.....	50
Література.....	78